Parciální derivace, gradient a směrová derivace

Pokud někde nejsou uvedeny výsledky, tak můžete využít konzultací u přednášejícího nebo u vedoucího cvičení. Totéž v případě že výsledky uvedeny jsou, ale vy neumíte příklad vyřešit.

Příklad 1. Spočtěte rychle všechny parciální derivace triviálních funkcí:
(a)$f = x^{(y^z)}$
(b)$f = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + x^y$
(c)$f = \sqrt{xy}(3x+3z)^{\sqrt{yz}}$
(d)$f = (3x+2z)^{\ln z}$
(ď)$f = z\mathrm{e}^{x^3 \ln\cos(x-y^2)}$

Příklad 2. Nalezněte bez váhání všechny parciální derivace funkce f v bodě A:
(a) $f = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$, $A = [1,1]$. *Výsledek:* $f'_x = -\sqrt{2}$, $f'_y = \sqrt{2}$.
(b) $f = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = [1,0]$. *Výsledek:* $f'_x = 0$, $f'_y = -\sqrt{2}$.
(c) $f = (1+\log_y x)^3$, $A = [\mathrm{e},\mathrm{e}]$. *Výsledek:* $f'_x = \frac{12}{\mathrm{e}}$, $f'_y = -\frac{12}{\mathrm{e}}$.
(č) $f = \mathrm{arctg}\sqrt{x^y}$, $A = [1,1]$. *Výsledek:* $f'_x = \frac{1}{4}$, $f'_y = 0$.

Příklad 3. Okamžitě spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A:
(a) $f = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, $A = [1,0]$. *Výsledek:* -1, $\frac{1}{4}$, 0.
(b) $f = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $A = [0,1]$ *Výsledek:* 0, $-\frac{1}{2}$, 0.
(c) $f = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$, $A = [0,0]$. *Výsledek:* 1, 0, 1.

Příklad 4. Jsou dány funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Nalezněte úhel gradientů těchto funkcí v bodě $[3,4]$
Výsledek: $\cos\alpha = -0.199$, $\alpha = 101°30'$.

Příklad 5. Nalezněte bod, ve kterém gradient funkce $z = \ln(x+\frac{1}{y})$ je roven vektoru $(1,-\frac{16}{9})$.
Výsledek: $[-\frac{1}{3},\frac{3}{4}]$, $[\frac{7}{3},-\frac{3}{4}]$.

Příklad 6. Nalezněte body, ve kterých se velikost gradientu funkce $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.
Výsledek: Body ležící na kružnici $x^2+y^2 = \frac{2}{3}$.

Příklad 7. Určete úhel mezi gradienty funkce $z = \ln\frac{y}{x}$ v bodech $A = [\frac{1}{2},\frac{1}{4}]$, $B = [1,1]$.
Výsledek: $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Příklad 8. Určete úhel mezi gradienty funkce $u = x^2+y^2+z^2$ v bodech
$A = [a,0,0]$, $B = [0,a,0]$.
Výsledek: $[\frac{\pi}{2}]$.

Příklad 9. Určete směrovou derivaci funkce $f = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $(2,1)$.
$[6\mathrm{e}^2]$.

Příklad 10. Určete směrovou derivaci funkce $f = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ v bodě $M = [1,2]$ ve směru vektoru, který jde z bodu M do bodu $N = [4,6]$. $[5]$.

Příklad 11. Určete derivaci funkce $f = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1, 2]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $135°C$. $[-\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Příklad 12. Určete derivaci funkce $f = \ln(x + y)$ v bodě $[1, 2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě. $[\frac{\sqrt{2}}{3}]$.

Příklad 13. Určete derivaci funkce $f = \mathrm{arctg}(xy)$ v bodě $[1, 1]$ ve směru jednotkového vektoru osy prvního kvadrantu. $[\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Příklad 14. Určete derivaci funkce $f = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ v počátku souřadnicového systému ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel α. $[\frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)]$.

Příklad 15. Určete derivaci funkce $f = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$ v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ležícím na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve směru jednotkového vektoru tečny ke kružnici v tomto bodě. $[-\frac{1}{2}]$.